TEMA 8: TRANSFORMACIONES EN EL PLANO

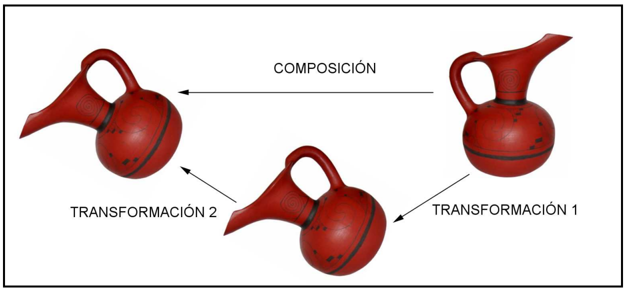
Matías Arce, Sonsoles Blázquez, Tomás Ortega, Cristina Pecharromán

1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo se van a describir transformaciones del plano, tanto las isométricas o movimientos (que conservan las distancias) como las isomórficas (que mantiene la forma). Algunos movimientos conservan la orientación del plano y, por esta razón, reciben el nombre de movimientos directos; por el contrario, otros cambian el sentido de orientación del plano y se denominan inversos. Se considera que el sentido positivo del plano es el contrario a las agujas del reloj. Aquí se van a estudiar simetrías (axial y central), giros y traslaciones. Como veremos en la descripción de estos movimientos, las simetrías axiales son movimientos inversos, mientras que los giros, las simetrías centrales y las traslaciones son movimientos directos.

Para cada movimiento existen figuras que se transforman en sí mismas al aplicarle el movimiento, son las llamadas figuras dobles o invariantes.

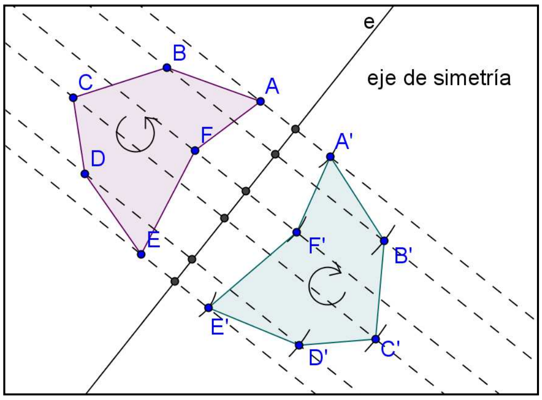
Las transformaciones se pueden componer, lo que significa que se realiza una transformación y a la figura trasformada se le aplica otra, de manera que la composición es la transformación que lleva la figura inicial en la final.



2. SIMETRÍA AXIAL

Simetría axial es un movimiento del plano determinado por una recta r del plano de tal manera que un punto P’ del plano es la imagen de un punto P dado (el simétrico de P) si la recta r es la mediatriz del segmento PP’. A la recta r se le llama eje de simetría y todos los puntos de este eje son dobles (la imagen de cualquier punto de r es el mismo punto).

La imagen de cualquier punto se determina trazando la perpendicular por dicho punto al eje de simetría y llevando la distancia del punto al eje al otro lado del eje a partir de él.



En la figura adjunta se ha determinado el polígono *A’B’C’D’E’F’* simétrico de *ABCDEF* respecto del eje de simetría r. Nótese que se ha invertido la orientación del plano (*ABCDEF* sentido positivo y *A´B´C´D´E´F´* sentido negativo).

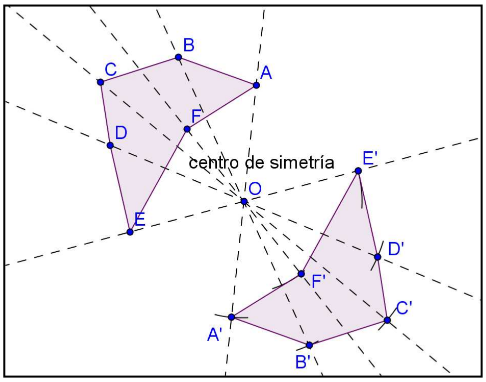
Para reconocer que un determinado movimiento es una simetría axial (se parte de una figura y su transformada), la mediatriz de los segmentos que unen cada punto con su transformado debe ser común, por lo que se debe trazar los segmentos, la mediatriz de uno de ellos y comprobar que dicha recta es perpendicular a todos ellos (así que todos son paralelos entre sí) y que los divide en dos partes iguales.

Se pueden enunciar las siguientes propiedades de la simetría axial.

- La simetría axial conserva la amplitud de los ángulos y las distancias (longitud de los segmentos).
- Las rectas perpendiculares al eje de simetría son dobles, pero no sus puntos.
- La imagen de una recta paralela al eje de simetría es otra recta paralela.
- La transformada de una recta oblicua forma con el eje de simetría un ángulo igual al que forma la recta dada y, por tanto, el eje de simetría es la bisectriz del ángulo que forma una recta oblicua con su transformada.
- La simetría axial es un movimiento involutivo (la figura simétrica de la simétrica de una figura dada es la propia figura de partida).
- La simetría axial es un movimiento inverso.

3. SIMETRÍA CENTRAL

Simetría central es un movimiento del plano determinado por un punto O del plano de tal manera que un punto P’ del plano es la imagen de un punto P (es el simétrico de P) si O es el punto medio del segmento PP’. Al punto O se le denomina centro de simetría.



Para determinar la figura simétrica de una dada se trazan las rectas que pasan por los puntos notables de la figura y se lleva sobre esta recta la distancia del punto al centro, desde el centro, al otro lado del centro.

Para reconocer que un determinado movimiento es una simetría central (se parte de una figura y su transformada), los segmentos que unen cada punto con su transformado debe cortarse en un único punto que dividirá cada segmento en dos partes iguales. Dicho punto es el centro de simetría.

Propiedades de la simetría central:

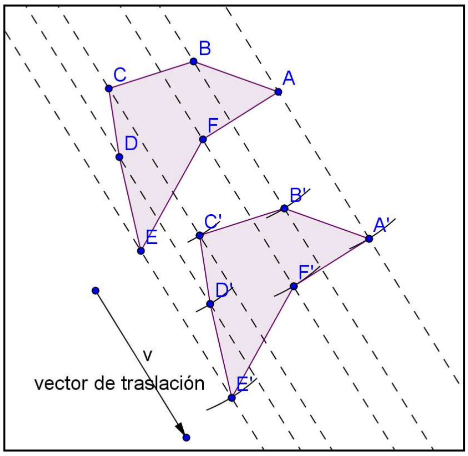
- La simetría central conserva la amplitud de los ángulos y las distancias (longitud de los segmentos).
- Las rectas que pasan por el centro de simetría son dobles, pero no sus puntos.
- Las circunferencias centradas en el centro de simetría son dobles, pero no sus puntos.
- La simetría central es un movimiento involutivo.
- La simetría central no cambia la orientación del plano ya que coincide con un giro de 180º.

4. TRASLACIONES

Considerado un vector $\vec{v}$ del plano, cualquier punto P del plano se transforma en otro punto P’ mediante la traslación definida por el vector $\vec{v}$ si el vector con origen en P y extremo en P’, $\overrightarrow{PP'}$, es un vector equivalente a $\vec{v}$ (tiene la misma dirección, es decir, las rectas que los contienen son paralelas, el mismo sentido y el mismo módulo o medida del segmento formado por los extremos del vector).

Para determinar la figura trasladada de otra, se trazan rectas paralelas al vector $\vec{v}$ que pasan por los puntos notables de la figura y se lleva la medida del vector (su módulo) a partir de cada punto en el sentido indicado por el vector.

Los vectores que tienen su origen en un punto de la figura y el extremo en su transformado son equivalentes a $\vec{v}$, de ahí que para reconocer una traslación haya que unir cada punto y su transformado y comprobar que todos los segmentos son paralelos y de la misma longitud. El vector de la traslación será cualquiera de dichos segmentos siendo el origen el punto de la figura inicial y el extremo su transformado.



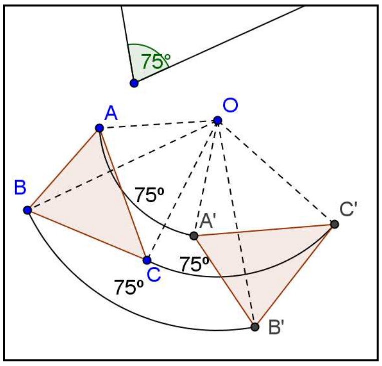
Este movimiento tiene las siguientes propiedades:

- La traslación conserva la amplitud de los ángulos y las distancias (longitud de los segmentos).
- La traslación conserva la orientación del plano.
- Las rectas que tienen la misma dirección del vector son figuras invariantes.
- La traslación no tiene puntos dobles.

5. GIROS

Son movimientos determinados por un punto que es el centro del giro, O, y un ángulo, α, de manera que un punto A y su transformado A’ determinan con O dos semirrectas, con origen en este punto, tales que su amplitud es la del ángulo del giro.

La imagen de una figura dada se obtiene girando los puntos de dicha figura con arcos de circunferencia centrados en O y con amplitud el ángulo dado, α. La figura adjunta muestra este proceso.



Para reconocer un giro basta observar que el centro de giro debe estar en la mediatriz del segmento que une un punto con su homólogo, por lo que todas las mediatrices de tales segmentos se deben cortar en un punto O.

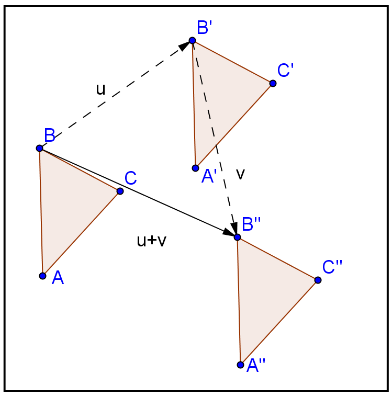
Además el ángulo AOA´, donde A y A´ son puntos homólogos debe ser siempre el mismo.

Este movimiento tiene las siguientes propiedades:

- El giro conserva la amplitud de los ángulos y las distancias (longitud de los segmentos).
- Los giros conservan la orientación del plano.
- El único punto doble en un giro de ángulo □es distinto de 0º y de 360º es el centro del giro.
- Los giros de 360º transforman cualquier punto en él mismo, todos los puntos son dobles. Es equivalente al giro nulo (0º).
- Una recta y la recta girada forman un ángulo igual al ángulo de giro y la bisectriz de dicho ángulo pasa por el centro de giro.

6. COMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS

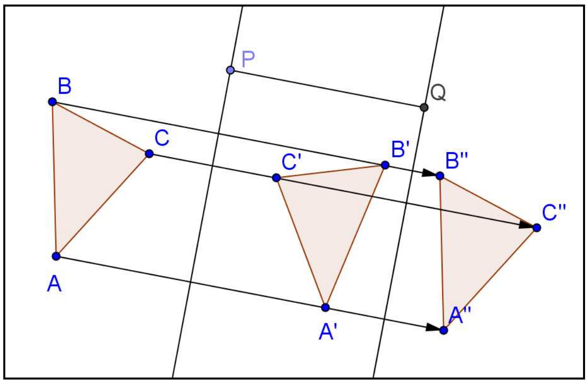
Composición de movimientos	***Traslación***	***Giro***	***Simetría axial***
Traslación	Traslación de vector suma	Giro	Deslizamiento
Giro	Giro	Giro	
Simetría axial	Deslizamiento		Traslación (ejes paralelos) Giro (ejes no paralelos)



Dos traslaciones se pueden componer dando lugar a otra traslación que está definida por la suma de los vectores que definen a las traslaciones que se componen. La composición de traslaciones tiene la propiedad conmutativa y la propiedad asociativa (ya que son propiedades de la suma de vectores).

Dada una traslación, definida por el vector $\vec{v}$, existe otra traslación, definida por el vector $-\vec{v}$ que al componerla con la anterior resulta la traslación definida por el vector nulo (traslación nula), que deja al plano invariante.

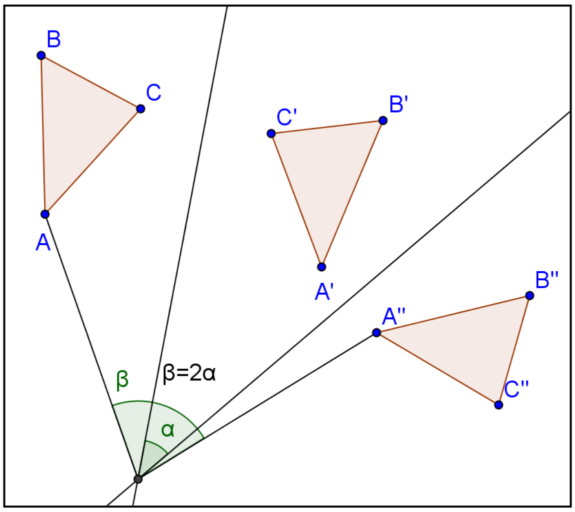
La composición de dos simetrías axiales de ejes de simetría paralelos es una traslación definida por un vector $\vec{v}$ que es perpendicular a los dos ejes de simetría y tal que su longitud es el doble de la distancia entre los dos ejes. Con la referencia de la figura adjunta, $\vec{v}=2\overrightarrow{PQ}$.



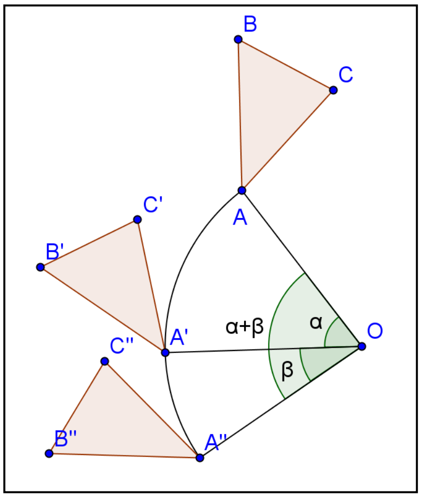
Recíprocamente, toda traslación se puede descomponer en dos simetrías de ejes paralelos (de infinitas formas) de manera que la distancia entre los ejes sea la mitad de la longitud del vector que define a la traslación.

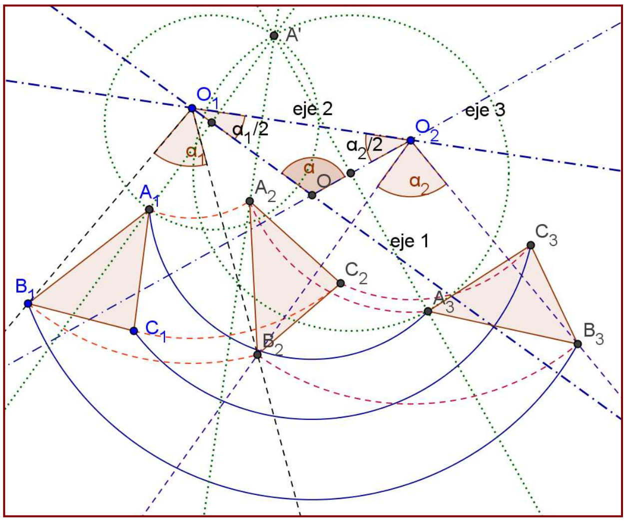
La composición de dos simetrías axiales de ejes de simetría secantes es un giro con centro en el punto de corte de las rectas y ángulo doble que el que forman dichas rectas.

Recíprocamente, todo giro de centro O y ángulo α se puede descomponer en dos simetrías axiales, cuyos ejes de simetría se cortan en el punto O y, además forman un ángulo de amplitud la mitad.



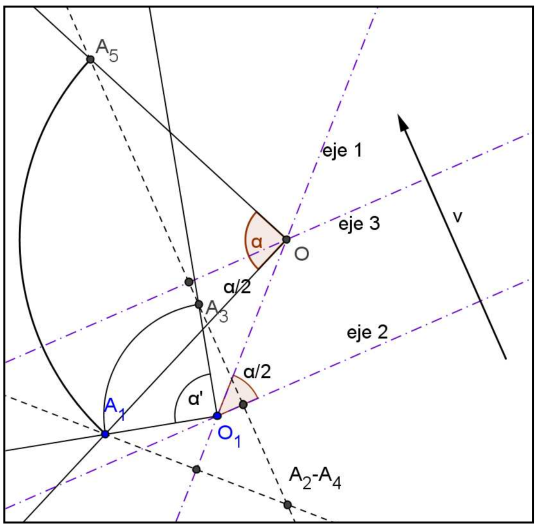
Dos giros con el mismo centro se pueden componer dando lugar a otro giro que está definido por la suma de los ángulos que definen a los giros que se componen. La composición de giros con el mismo centro tiene la propiedad conmutativa y la propiedad asociativa (ya que son propiedades de la suma de ángulos). Dado un giro, definido por el punto O y el ángulo α, existe otro giro, definida por el mismo punto O y el ángulo $-\alpha$ que al componerle con el anterior resulta la figura original (equivale a un giro de 0º).





La composición de giros de centros O_1 y O_2, distintos, y amplitudes α_1 y α_2 (iguales o distintas) es otro giro cuyo centro y amplitud se determinan de la forma siguiente: Cada giro se descompone en dos simetrías de ejes e_1 y e_2, para el primero, y e_2 y e_3 para el segundo. Se considera que la segunda simetría del primer giro es la primera del segundo giro, aunque sea el primer eje que se dibuja, ya que tiene que pasar por ambos centros (O es el tercer vértice del triángulo de lado O_1O_2 y ángulos adyacentes $\alpha_1/2$ y $\alpha_2/2$). En la figura se han representado los vértices transformados del triángulo de partida A_1, B_1, C_1 por los sucesivos (A_2, B_2, C_2 y A_3, B_3, C_3) de amplitudes α_1 y α_2, así como el giro resultante de ambos de centro O y amplitud $\alpha = 180° - \dfrac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$ y también los transformados por las cuatro simetrías del punto A_1 (por la simetría del *eje 1* se transforma en *A'*, este punto, por la simetría del *eje 2*, se transforma en A_2, éste se transforma en *A'* por la simetría de *eje 2* y, finalmente, *A'*, por la simetría de *eje 3*, se transforma en A_3. Así, la composición de las simetrías de ejes 1 y 3 resulta ser igual a la composición de los giros iniciales por lo que se obtiene un giro de centro el punto de corte de los ejes, O y ángulo el doble del que forman los ejes,

$$2\alpha = 2\left(180° - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right) = 360° - (\alpha_1 + \alpha_2) = \alpha_1 + \alpha_2$$

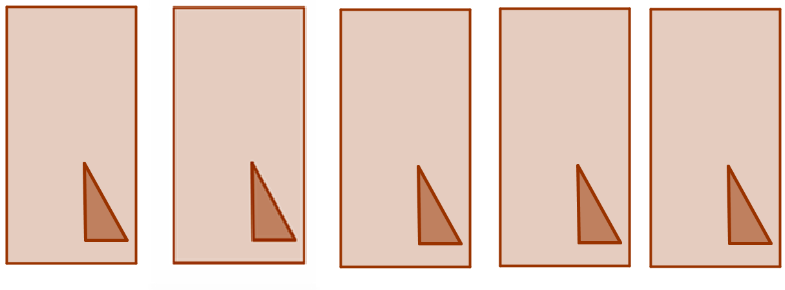


La composición de una traslación y un giro es un giro de la misma amplitud que el giro de partida y cuyo centro se determinan como sigue: Considerada una traslación definida por el vector $\vec{v}$ y un giro de centro O_1 y ángulo α, el giro se descompone en dos simetrías cuyos ejes formen un ángulo de amplitud $\alpha/2$, de manera que el eje de la segunda simetría (eje 2) sea perpendicular al vector $\vec{v}$ que determina la traslación. A su vez, este eje será el de la primera simetría que compone traslación y el eje (eje 3) de la segunda simetría de este movimiento determina con el eje de la primera simetría que compone el giro (eje 1) el centro, O del giro resultante.

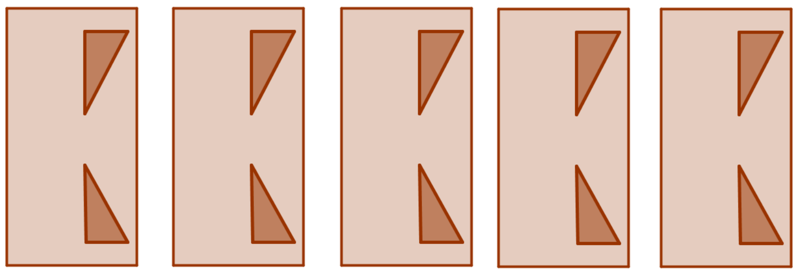
7. FRISOS Y MOSAICOS

Se llaman frisos o cenefas a la repetición, mediante traslación, de una figura base. Existen siete tipos de frisos que se pueden construir de una figura base mediante isometrías. El friso se construye repitiendo un determinado módulo o figura mediante traslaciones. A continuación se muestran los siete tipos de frisos; en ellos se ha repetido el motivo (la baldosa que genera el friso) cinco veces:

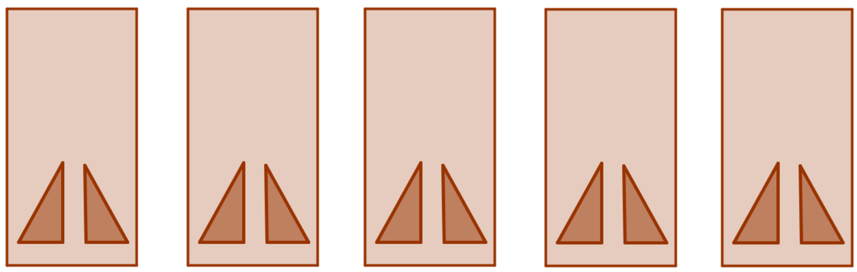
Grupo 1



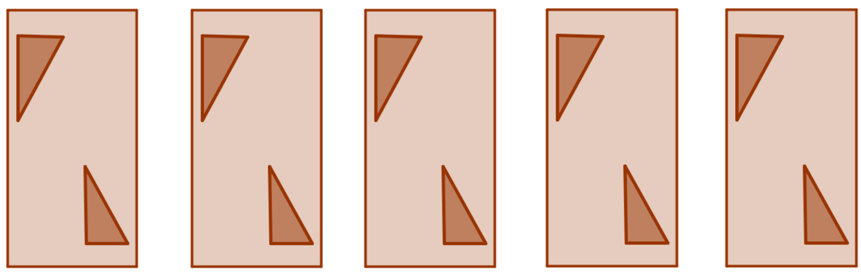
Grupo 2



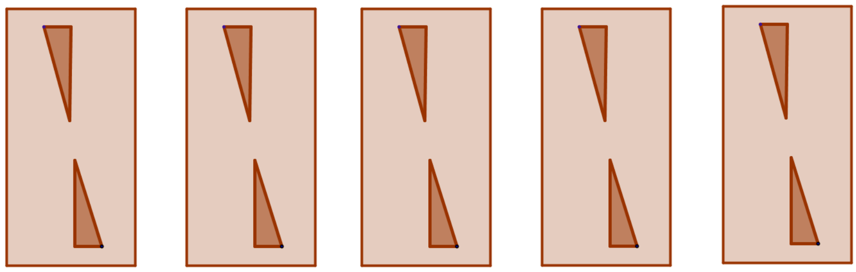
Grupo 3



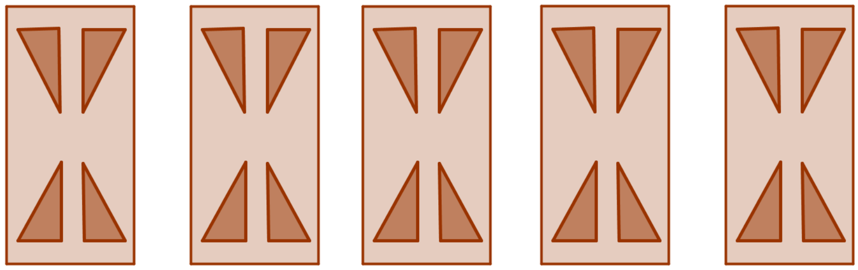
Grupo 4



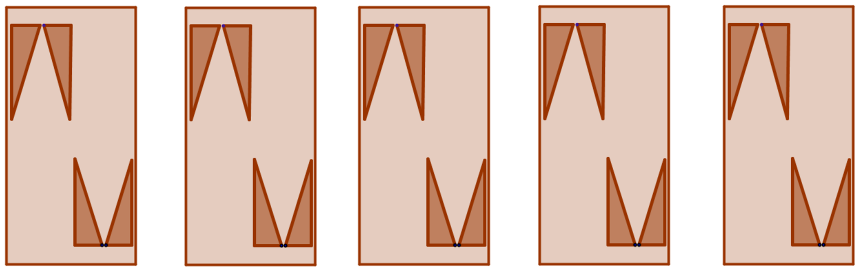
Grupo 5



Grupo 6

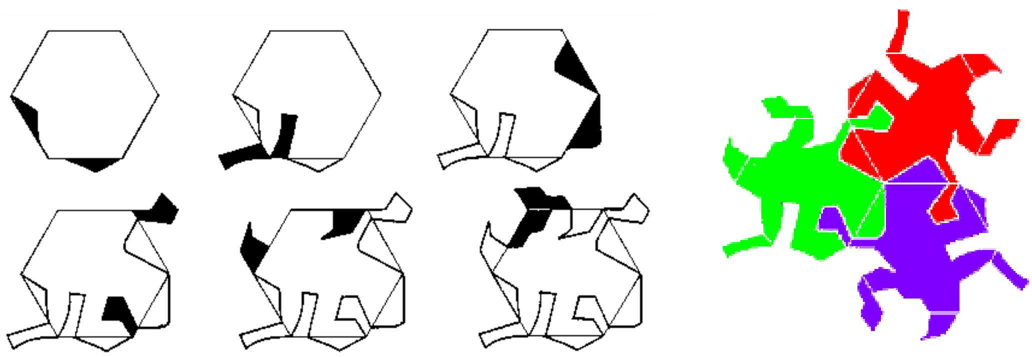


Grupo 7



Tarea 1: *Analiza los movimientos del plano que generan las baldosas generadoras de los frisos partiendo de la primera.*

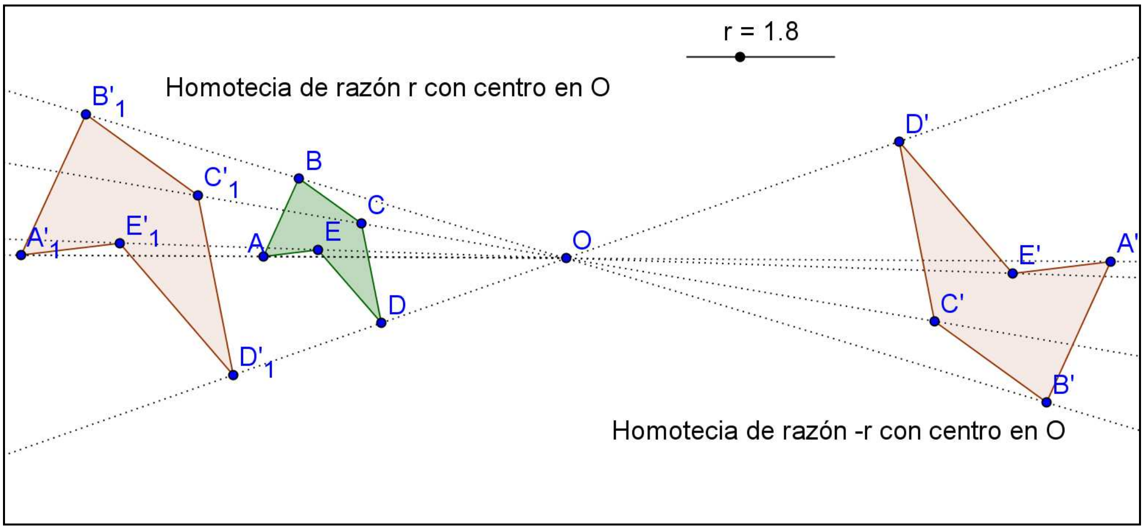
Para generar la figura base de un mosaico irregular se utilizan los movimientos isométricos. Para ello se parte de un figura que rellene el plano y se deforma o corta uno de los lados para aplicar después un giro (que depende de la figura, normalmente respecto a un vértice o al punto medio de un lado), una traslación a un lado opuesto o una simetría. El ejemplo de la figura es un mosaico de Escher.



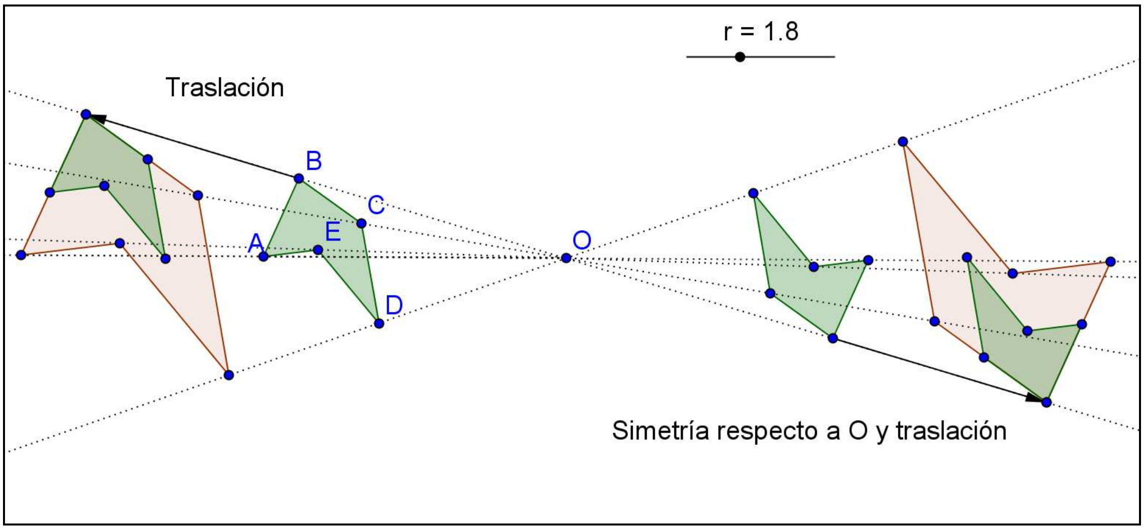
Tarea 2: *Analiza los movimientos del plano que se han aplicado en el hexágono para general la figura anterior.*

8. HOMOTECIAS

Considerados un punto O y número real r, una homotecia es una transformación del plano que asocia a cada punto P un punto P´ tal que el vector OP´ es el resultado de multiplicar r por el vector OP. Si |r|>1 la transformada tiene tamaño mayor que la figura de partida, si r=1 son iguales, si r=-1 son simétricas respecto a O y si |r|<1 la transformada es menor.



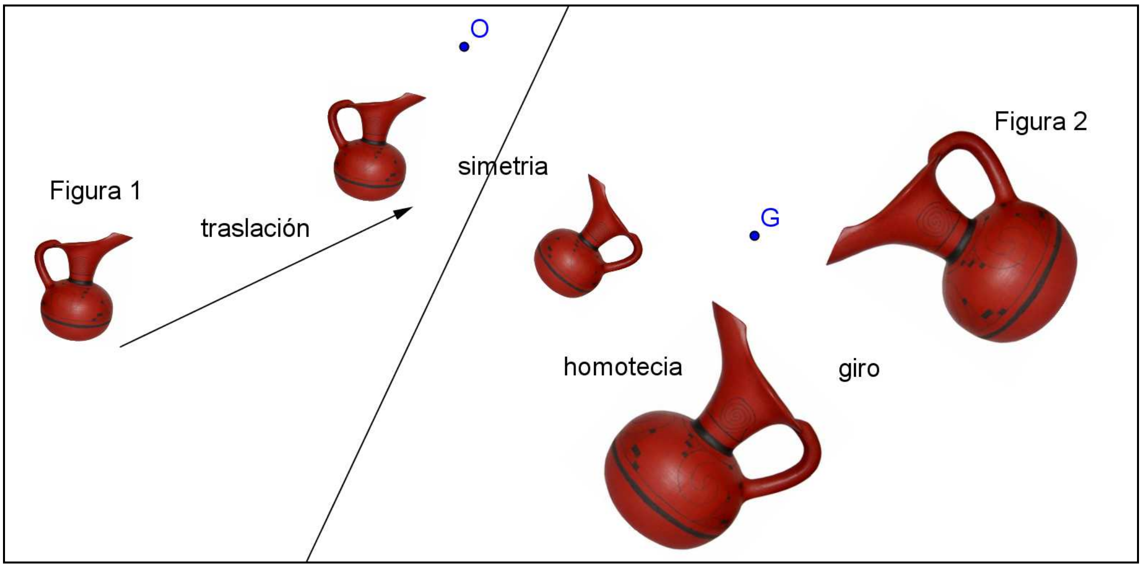
Si se realiza una traslación (para r positivo) o una traslación y una simetría central (si r es negativo) las figuras se pueden colocar en posición de Tales. Por ello, una figura y su transformada por una homotecia son figuras semejantes (las homotecias conservan los ángulos).



Para reconocer que una transformación es una homotecia se trazan las rectas que pasan por un punto y su homólogo, y se comprueba que todas ellas se cortan en un punto (el origen de la homotecia) y que las distancias de dicho punto a los puntos de la figura transformada son proporcionales a las distancias a los puntos de la figura inicial.

La composición de homotecias con el mismo centro es otra homotecia con el mismo centro y razón el producto de las razones.

Una figura es semejante a otra si, y solo si, es composición de una o varias homotecias y uno o varios movimientos.



Las semejanzas tienen multitud de aplicaciones en la vida real: mapas, planos y dibujos a escala, medición de alturas y distancias, proyecciones, etc.

Tarea 3: *El formato DIN es un formato normalizado de papel que tiene la peculiaridad de que al cortar por la mitad una hoja con tamaño An se obtiene el tamaño A(n+1). De esta manera los rectángulos que se obtienen son semejantes, lo que facilita las reducciones y/o ampliaciones. Calcula la razón de semejanza de dos formatos cualesquiera An y A(n+1) sin medir las hojas.*